



TITLE:

場の理論におけるハミルトニアン の正準変換 (ハミルトニアンの定義 とスペクトル)

AUTHOR(S):

宮武, 修

CITATION:

宮武, 修. 場の理論におけるハミルトニアンの正準変換 (ハミルトニアンの定義とスペクトル). 数理解析研究所講究録 1974, 208: 88-103

ISSUE DATE:

1974-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105178>

RIGHT:

場の理論におけるハミルトニアン の正準変換

阪府大 エ 宮 武 修

要約: ここで主としてとり扱う対象は, 点状核子と相互作用をしている3次元空間におけるスカラー中間子の場である. 核子は空間に固定されていて, *spin* 及び *isospin* の自由度をもつが, 励起状態をもたないとする. 一般に場の全ハミルトニアンを $H = H^0 + gH'$ と書き, これに次々に正準変換を施し, H をできるだけ対角形にもつてゆくことを試みる. これらの正準変換で用いられるユニタリ作用素は, 普通の時間をふくまない摂動級数から導かれるものである. N を1つの正整数とし, H に n 回正準変換を施して H_n が得られたとすると, H_n は $H_n = H^0 + W^{(N)} + R^{(N)}$ の形にかかれる. ここで n は N によってきまる正整数, $W^{(N)}$ は g について N 次の多項式でエネルギーに対して対角形であり, $R^{(N)}$ は $O(g^{N+1})$ である. $W^{(N)}$ は C -数と核子間のポテンシヤルとエネルギー保存の散乱に寄与する作用素とから成る. 以上の一般論を展開し

たあとで、これをスカラー中間子の場に適用して次の諸問題をあつかう。1° 新しく得られる真空状態に関する H の期待値を計算する、2° 2次及び3次の散乱行列要素を算出する。核子をはじめてから実状とすると、発散の困難がおこるから、吾々はまず、運動量を cut-off して諸公式を誘導し、そのあとで cut-off をとり除くことにする。

§ 1. 序

中性スカラー中間子場が空間に固定された核子と相互作用をしている場合には、その全ハミルトニアン H は適当な正準変換によって容易に対角形にすることができる¹⁾。しかし核子が spin や isospin をもっている場合には、 H の対角化は簡単にできない。この研究の目的は、このように簡単に対角化できない H に順次に正準変換をほどこして、出来るだけ対角形に近い作用素をつくって行こうとするものである。 n 個のユニタリ作用素 U, U_1, \dots, U_{n-1} を使つて、 H が次々に H_1, H_2, \dots, H_n に変換されたとする：

$$H_1 = U^{-1} H U, \quad H_2 = U_1^{-1} H_1 U_1, \quad \dots, \quad H_n = U_{n-1}^{-1} H_{n-1} U_{n-1}, \quad (1.1)$$

ここで U, U_1, \dots, U_{n-1} は摂動級数をもとにして作られたものである。さて $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = H_\infty$ は結合定数 g に関してべき展開可能かという点、一般には不可能である。しかしその場合

でも, g に関する漸近級数としての意味をもつことがある.

Friedrichs²⁾ 等は $U^+ H U^- = H^0$, $U^- U^+ = 1$ なる U^\pm を逐次近似で求めようとした. 吾々の場合 $U_{n-1} = U U_1 \cdots U_{n-1}$ とおくと U_{n-1} はユニタリで

$$H_n = U_{n-1}^{-1} H U_{n-1} = H^0 + W^{(N)} + R^{(N)} \quad (1.2)$$

とかかれる. $W^{(N)}$ は対角形で g に関して N 次, $R^{(N)}$ は残余で $O(g^{N+1})$, N は正整数, n は N によってきまる正整数である. 散乱その他実際計算には $W^{(N)}$ を用いて行われる.

§ 2. 簡単なモデル

§ 3 で述べられる一般論は, 以下に述べる 2 つのモデルに適用される (§ 4 以下). 用いられる記号は参考文献 3), 4) による.

1) 中性中間子の場合

固定核子の位置を x_n とすると, 古典波動方程式は

$$(\square - \mu^2) \psi = g \sum_n \delta(x - x_n) \quad (2.1)$$

であたえられる. 中間子場が体積 V の立方体に関して周期的であるとすると, 全ハミルトニアン H は次のようにかかれる.

$$H = H^0 + g H', \quad (2.2)$$

$$H^0 = \sum_k H_k^0 = \sum_k \frac{1}{2} (p_k^* p_k + \omega_k^2 q_k^* q_k) = \sum_k \omega_k (a_k^* a_k + \frac{1}{2}),$$

$$H' = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k g_k V_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k V_k + a_k^* V_k^*),$$

$$V_k = \sum_n e^{ikx_n},$$

ここで $k = K$, $kx = (Kx) = Kx$, $\omega_k = \sqrt{K^2 + \mu^2}$.

2) isovector 中間子場

H は (2.2) の形にかゝれ, n 核子の spin を σ_n , isospin を $\tau_n^{(u)}$, $\lambda = 1, 2, 3$ とすると

$$H^0 = \sum_{\lambda k} \frac{1}{2} (p_{\lambda k}^* p_{\lambda k} + \omega_k^2 g_{\lambda k}^* g_{\lambda k}) = \sum_{\lambda k} \omega_k (a_{\lambda k}^* a_{\lambda k} + \frac{1}{2}),$$

$$H' = \sum_{\lambda k} \sqrt{2\omega_k} V_{\lambda k} g_{\lambda k} = \sum_{\lambda k} (V_{\lambda k} a_{\lambda k} + V_{\lambda k}^* a_{\lambda k}^*)$$

$$V_{\lambda k} = \sum_n V_{\lambda k n} = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_n \tau_n^{(u)} (\sigma_n k) \frac{e^{ikx_n}}{\sqrt{2\omega_k}}$$

§ 3. 一般論

全ハミルトン $H = H^0 + g H'$ において, H' にくまぬ中間子の運動量は cut-off されている. したがって H' , H はともに, H^0 の固有ベクトル $|m\rangle$ ではらぬヒルバート空間 $\mathcal{H}(H^0)$ で自己共役である. H^0 , H の固有値方程式は

$$H^0 |m\rangle = E_m^0 |m\rangle, \quad (3.1)$$

$$H \Phi_m = E_m \Phi_m \quad (3.2)$$

とかゝれ, 正規直交条件 $\langle m | n \rangle = \Phi_m^* \Phi_n = \delta_{mn}$ が満足されているものとする. いま time-independent な擾動展開

$$\Phi_m = |m\rangle + g \sum_n \frac{\langle n | H' | m \rangle}{E_m^0 - E_n^0} |n\rangle + \dots \quad (3.3)$$

を参考にして作用素

$$B(gH') = \sum_{mn} \frac{|n\rangle \langle n|gH'|m\rangle \langle m|}{E_m^0 - E_n^0} \quad (3.4)$$

を作ってみると，反対称条件 $B^* = -B$ が成立することが分かるので， $B(gH')$ をつかってユニタリ作用素

$$U = U_0 = \exp(B(gH')) \quad (3.5)$$

を定義することができる。但し，(3.3) が意味をもつためには H' は条件：

$$E_m^0 - E_n^0 = 0 \text{ のとき } \langle m|H'|n\rangle = 0 \quad (3.6)$$

を満足しなければならない。さて U をつかった展開

$$U|m\rangle = |m\rangle + \frac{g}{1!} \sum_n \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m^0 - E_n^0} |n\rangle + \dots \quad (3.7)$$

は (3.3) と右辺の級数が n 項まで一致する。

吾々はこれから H の正準変換に移るのであるが，そのために次の二つの定理を述べておく。

定理 1. V は作用素

$$B(V) = \sum_{mn} \frac{|n\rangle \langle n|V|m\rangle \langle m|}{E_m^0 - E_n^0} \quad (3.8)$$

が定義できるような作用素である。このとき次の式がえられる：

$$[B(V), H^0] = V \quad (3.9)$$

証明

$$B(V)H^0 - H^0B(V) = \sum_{mn} \frac{|n\rangle\langle n|V|m\rangle\langle m|}{E_m^0 - E_n^0} E_m^0$$

$$-\sum_{mn} E_n^0 \frac{|n\rangle\langle n|V|m\rangle\langle m|}{E_m^0 - E_n^0} = \sum_{mn} |n\rangle\langle n|V|m\rangle\langle m| = V$$

定理2. V は自己共役作用素で (3.8) によつて反対称な $B(V)$ が定義できるものとする. また W は任意の作用素である. $H = H^0 + V + W$ とおくとき次の展開式がえられる:

$$\begin{aligned} e^{-B(V)} H e^{B(V)} &= H^0 + W - \frac{1}{2!} [B(V), V] + \frac{2}{3!} [B(V), [B(V), V]] \\ &- \frac{3}{4!} [B(V), [B(V), [B(V), V]]] + \dots \\ &- \frac{1}{1!} [B(V), W] + \frac{1}{2!} [B(V), [B(V), W]] - \frac{1}{3!} \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

証明. 公式⁵⁾

$$e^{i\lambda B} A e^{-i\lambda B} = A + \frac{i\lambda}{1!} [B, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [B, [B, A]] + \dots \quad (3.11)$$

と, (3.9) を使えばよい.

定理2において $W = 0$ とし, $B(V)$ として (3.5) の $B(gH')$ を用いると全ハミルトニアン H の第1回目の正準変換が行われる:

$$H_1 = U^{-1} H U = H^0 - \frac{1}{2!} T_2 + \frac{2}{3!} T_3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} T_n + \dots \quad (3.12)$$

但し T_n は n 重交換子で

$$T_n = [B(gH'), [B(gH'), [\dots, [B(gH'), gH'] \dots]]]. \quad (3.13)$$

運動量の cut-off が行われているから, gH' も $B(gH')$ も有限回の発生, 消滅演算子 a_k^*, a_k の1次結合である. 従つて,

T_n は n 個の a_k, a_k^* の積の有限和である。

次に2回目の正準変換を行うために定理3を述べる：

定理3. C は p 個の消滅演算子 a_k と $q = n - p$ 個の発生演算子 a_k^* の積であつて、 a_{k_u} が m_u 個、 $a_{l_v}^*$ が n_v 個ふくまれているとする。任意の2つの状態 $|i\rangle, |f\rangle$ のエネルギーをそれぞれ E_i^0, E_f^0 としたとき、行列要素 $\langle f | C | i \rangle$ が0にならないためには、等式

$$E_f^0 - E_i^0 = S \quad (3.14)$$

が成り立つことが必要である。こゝに S は

$$S = - \sum_{u=1}^p m_u \omega_{k_u} + \sum_{v=1}^q n_v \omega_{l_v} \quad (3.15)$$

であたえられ、 $|i\rangle, |f\rangle$ には無関係、 C だけに依存する。

証明は容易だから省略する。

定義. 消滅・発生演算子 a_k, a_k^* の積 C に付随してきまる S の大きさによつて、次の3つのクラスを定義する。こゝで ε は任意の正数である。 $class(W)$ は $S = 0$ なる C の集り、 $class(V)$ は $|S| > \varepsilon$ なる C の集り、 $class(R)$ は $S \neq 0$ で $|S| \leq \varepsilon$ なる C の集りである。

N を一定の正整数とすると、任意の整数 $n (\leq N)$ に対する T_n は有限個の C をもつ。そのうちのある C は $class(R)$ に属する。しかし ε を十分小さくすると、 $class(R)$ にぞくする C をすべて $class(V)$ に属するようにできる。このように

して, ε を十分小さくにとって, $\text{class}(R)$ にぞくする C はすべて T_n ($n > N$) のみに含まれるようにしておく. そうすると級数 (3.12) は次のように書かれる:

$$\begin{aligned} H_1 &= H^0 - \frac{1}{2!} (W_1^{(2)} + V_1^{(2)}) + \frac{2}{3!} (W_1^{(3)} + V_1^{(3)}) \\ &\quad - \frac{N-1}{N!} (W_1^{(N)} + V_1^{(N)}) + \frac{N}{(N+1)!} T_{N+1} - \dots \\ &= H^0 + W_1 + V_1 + R_1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

ここで N は偶数にとつてあり

$$\begin{aligned} W_1 &= -\frac{1}{2!} W_1^{(2)} + \frac{2}{3!} W_1^{(3)} - \dots - \frac{N-1}{N!} W_1^{(N)}, \\ V_1 &= -\frac{1}{2!} V_1^{(2)} + \frac{2}{3!} V_1^{(3)} - \dots - \frac{N-1}{N!} V_1^{(N)}, \\ R_1 &= \frac{N}{(N+1)!} T_{N+1} - \frac{N+1}{(N+2)!} T_{N+2} + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

$W_1^{(m)}$ は W -型, V_1 は V -型の C の集りである. W_1, V_1, R_1 はそれぞれ自己共役である.

以上の準備のもとに2回目の正準変換を行なう. (3.17) の V_1 は V -型であるから, 反対称作用素

$$B(V_1) = \sum_{mn} \frac{|n\rangle \langle n| V_1 |m\rangle \langle m|}{E_m^0 - E_n^0} \quad (3.18)$$

と, これにとりなうユニタリ作用素 $U_1 = \exp(B(V_1))$ とが定義できる. この U_1 を用いて (3.16) の H_1 を変換すると, 定理2によつて次の H_2 がえられる:

$$H_2 = U_1^{-1} H_1 U_1 = H^0 + W_1 + R_1 - \frac{1}{2!} [B(V_1), V_1] + \frac{2}{3!} \dots$$

$$\begin{aligned}
& - [B(V_1), W_1] + \frac{1}{2!} [B(V_1), [B(V_1), W_1]] - \dots \\
& - [B(V_1), R_1] + \frac{1}{2!} [B(V_1), [B(V_1), R_1]] - \dots \quad (3.19)
\end{aligned}$$

$$= H^0 + W_1 + W_2 + V_2 + R_2. \quad (3.20)$$

ここで W_2 , V_2 , R_2 のきめ方は次の通りである: (3.19) において, $O(g^{N+1})$ なる位数をもつ項はすべて R_2 に入れる.

2行目にある $[R(V_1), W_1]$ は V_2 に入れる. 残りの

$$\begin{aligned}
& [B(V_1), V_1], [B(V_1), [B(V_1), V_1]], \dots \\
& [B(V_1), [B(V_1), W_1]], \dots \quad (3.21)
\end{aligned}$$

はいづれも N 次以下であつて, これらに含まれる各単項は $\text{class}(W)$, $\text{class}(V)$ のいづれかに属するように ε を小さくとっておく. すぐ分かるように W_2 , V_2 はいづれも g^4 から始まり, R_2 は g^{N+1} から始まる.

次に3回目の正準変換に移る. (3.20) の V_2 は自己共役で V -型である. したがつて, 反対称作用素 $B(V_2)$ を使ってユニタリ作用素 $U_2 = \exp(B(V_2))$ が定義できる. これから

$$\begin{aligned}
H_3 = U_2^{-1} H_2 U_2 &= H^0 + W_1 + W_2 + R_2 - \frac{1}{2!} [B(V_2), V_2] + \frac{2}{3!} \dots \\
& - [B(V_2), W_1] + \frac{1}{2!} [B(V_2), [B(V_2), W_1]] - \dots \\
& - [B(V_2), W_2] + \frac{1}{2!} [B(V_2), [B(V_2), W_2]] - \dots \\
& - [B(V_2), R_2] + \frac{1}{2!} [B(V_2), [B(V_2), R_2]] - \dots \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$$= H^0 + W_1 + W_2 + W_3 + V_3 + R_3.$$

W_3, V_3, R_3 をきめる要領は W_2, V_2, R_2 をきめるときの要領と同じである.

このようにして, n 回目の正準変換の結果は次のように書くことができる:

$$H_n = U_{n-1}^{-1} H_{n-1} U_{n-1} = H^0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_n + V_n + R_n. \quad (3.23)$$

ここで W_k は W -型の単項式, V_n は V -型の単項式の有限和である. $W_1, W_2, \dots, W_n, V_n$ の g についての最高べきはいずれも N であるが, 最低べきについては, W_1 は 2, $W_k (k \geq 2)$ は $4(k-1)$, V_k は $2k$ である. したがって $n = N/2 + 1$ とおくと (3.23) は次のようにかゝれる:

$$\begin{aligned} H_n &= H^0 + W_1 + W_2 + \cdots + R^{(N)} \\ &= H^0 + W^{(N)} + R^{(N)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで $W^{(N)} = W_1 + W_2 + \cdots$ で $R^{(N)}$ は $O(g^{N+1})$ である.

(3.24) が応用上大切な式であるが, 次の事実は重要である: $W^{(N)}$ において g^2 の項は W_1 だけにあらわれ, g^4 の項は $W_1 + W_2$ だけにあらわれる等々.

これまで行つた n 回の正準変換をひとまとめにして行うことにすると, $H_n = U_{n-1}^{-1} H U_{n-1}$ とかゝれる. ここで $U_{n-1} = U_1 U_2 \cdots U_{n-1}$ はユニタリである. したがって, もとの固有値方程式 (3.2) は $U_{n-1} H_n U_{n-1}^{-1} \Phi_m = E_m \Phi_m$, すなわち

$$(U_{n-1} H^0 U_{n-1}^{-1} + U_{n-1} (W^{(N)} + R^{(N)}) U_{n-1}^{-1}) \Phi_m = E_m \Phi_m \quad (3.25)$$

とかかれる。この方程式において $U_{n-1} H^0 U_{n-1}^{-1}$ は新しい無摂動ハミルトニアンとみなされ、したがって $U_{n-1} |m\rangle$ は新しい基礎ベクトルである。(3.25)の左辺の第2項は新しい相互作用項である。一般にもとの場の作用素 A — たとえば a_k, a_k^* 等 — は新しい座標系では $\bar{A} = U_{n-1} A U_{n-1}^{-1}$ で置きかえられる。尚、もとの全ハミルトニアン H の新しい真空状態に関する期待値は $\langle 0 | H_n | 0 \rangle = \langle H_n \rangle_0$ であたえられ、新しい2つの状態 $U_{n-1} |l\rangle, U_{n-1} |m\rangle$ に関する、新しい相互作用項の行列要素は $\langle m | W^{(N)} + R^{(N)} | l \rangle$ であたえられることが分かる。

吾々はこゝで3つの注意を述べておく。

N. B. 1. H_n の自己共役性と U_n のユニタリ性。

cut-off の操作で、 H が自己共役で、 U がユニタリであることは明らかである。 V_{n-1} は自己共役である。何となれば V_{n-1} は a_k, a_k^* の積から成る単項式と、そのエルミット共役な単項式を含み、しかもこれら単項式の有限和だからである。このことから U_{n-1} はユニタリとなり、従つて H_n の自己共役性が導かれる。故に帰納法によつて H_{n-1}, U_{n-1} が所期の性質をもつことが帰結される。

N. B. 2. $R^{(N)}$ は $n, N \rightarrow \infty$ に対して 0 になるかどうかは

分らない。もし $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = H_\infty$ において

$$H_\infty = H^0 + W_1 + W_2 + \dots \quad (3.26)$$

とかいて、これが収束すると仮定すると、 H_∞ 、したがって H の固有値は $g=0$ の近傍で g のべき級数に展開できることになり、通常このことは期待できない。故に $n, N \rightarrow \infty$ に対して $R^{(N)}$ は 0 にならないのが普通である。

N. B. 3. この論文であつかう スカラー中間子の場合には正則摂動の理論が適用できて⁷⁾ $n, N \rightarrow \infty$ に対して $R^{(N)} \rightarrow 0$ となることが期待される。

いづれにしても、 $m < N$ のとき、 m 次の過程の計算をしようとする時には、 $R^{(N)}$ の有無にかかわらず、 $W^{(N)}$ の中から g^m の項だけをひろい出して計算すればよい。

§ 4. 中性中間子の場合への応用

このときは

$$B(H) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\omega_k^2} V_k^* p_k = -\frac{1}{\sqrt{2V}} \sum_k V_k^* \omega_k^{-\frac{3}{2}} (a_k^* - a_k)$$

となり、

$$H_1 = U^{-1} H U = H^0 + W_1 = H^0 - \frac{g^2}{2} \sum_{n, n'} u(x_n - x_{n'})$$

がえられて 1 回の正準変換で H_1 は対角化されている。ここで

$$u(x) = \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{ikx}}{\omega_k^2}$$

この場合には、cut-off をとり除くと $h_f(H_0)$ と $h_f(H)$ とが直交

すること, また核子による中間子の散乱は起らないことなどが結論される.

§5. Isovector スカラー 中間子への応用.

この場合には一挙に H を対角化するユニタリ作用素を見出すことは困難である. §2 であたえた H に §3 の理論を適用すると次の諸結果がえられる. くわしい計算は省略する.

(1)

$$B(H') = i \sum_{\lambda k} \frac{1}{\omega_k} \sqrt{\frac{2}{\omega_k}} V_{\lambda k}^* p_{\lambda k} = \sum_{\lambda k} \frac{1}{\omega_k} (V_{\lambda k} a_{\lambda k} - V_{\lambda k}^* a_{\lambda k}^*)$$

(2) 核子が1個, 空間の原点に固定しているとき2次の近似で

$$\langle H_n \rangle_0 = - \frac{3g^2}{2V} \sum_k \frac{k^2}{\omega_k^2}.$$

(3) 運動量の cut-off が行われているとき $\langle H_1 \rangle_0$ は有限である.

(4) (2) の条件のもとで, 4次の近似では

$$\begin{aligned} \langle H_n \rangle_0 = & - \frac{3g^2}{2V} \sum_k \frac{k^2}{\omega_k^2} \\ & + \frac{3}{4} \left(\frac{g}{\sqrt{2V}} \right)^4 \sum_{k, k'} \frac{\omega_k + \omega_{k'}}{(\omega_k \omega_{k'})^3} \left\{ (3k^2 k'^2 + (k k')^2 - (k \times k')^2) \right. \\ & \left. - 2 \left(\frac{\omega_k - \omega_{k'}}{\omega_k + \omega_{k'}} \right)^2 (2(k k')^2 + (k \times k')^2) \right\}. \end{aligned}$$

(5) $|k| > K$ なる k をすべて cut-off すると

$$|\langle H_n \rangle_0| \sim \frac{-1}{2\pi^2} K^3 + \frac{\delta}{6\pi^4} K^5,$$

δ は小さな正数である.

(6) 2次の散乱の行列要素

$$p\pi_K^- \rightarrow p\pi_{K'}^- : -\frac{g^2}{V} \frac{k^2}{\omega_K^2} (\cos\theta + i\sin\theta \cdot n\sigma)$$

$$p\pi_K^- \rightarrow n\pi_{K'}^0 : -\frac{g^2}{V} \frac{k^2}{\omega_K^2} 2\cos\theta$$

$$p\pi_K^+ \rightarrow p\pi_{K'}^+ : -\frac{g^2}{V} \frac{k^2}{\omega_K^2} (\cos\theta - i\sin\theta \cdot n\sigma),$$

こゝで

$$K'K = k'k \cos\theta, \quad K \times K' = k'k \sin\theta \cdot n.$$

尚3次の散乱行列要素はたとえば

$$\pi_{K_0}^+ + n \rightarrow p + \pi_{K'_0}^0 + \pi_{K''_0}^0$$

では次のようになる:

$$\begin{aligned} & \frac{4ig^3}{V\sqrt{V}} \frac{1}{(\omega_{K''_0} \omega_{K'_0} \omega_{K_0})^{\frac{3}{2}}} \times \left\{ \omega_{K''_0} [(k'_0 k''_0)(\sigma_{K_0}) - (k_0 k'_0)(\sigma_{K''_0}) \right. \\ & \left. - (k_0 k'_0)(\sigma_{K''_0})] + \omega_{K'_0} [(k'_0 k''_0)(\sigma_{K_0}) - (k_0 k'_0)(\sigma_{K''_0}) - (k_0 k'_0)(\sigma_{K''_0})] \right. \\ & \left. + \omega_{K_0} [(k''_0 k_0)(\sigma_{K'_0}) + (k'_0 k_0)(\sigma_{K''_0})] \right\}. \end{aligned}$$

これら散乱の問題では中間状態を考える必要はない. $W^{(N)}$ はつねにエネルギーに関して対角形であるからである.

付録

級数(3.26)が収束しない例を考察しよう. その簡単な例

は非調和振動子

$$H = H^0 + g H' = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + g x^4$$

であたえられる。 $g \geq 0$ のとき H の固有値は実スペクトルをなすが、 $g < 0$ のときは実スペクトルをもたない。故に $g=0$ は固有値の特異点である。このことは別の見地から結論できる⁸⁾。ところで $x = i(a - a^*)/\sqrt{2}$ とおいて H を

$$H = a^* a + \frac{1}{2}(a - a^*)^4 = H^0 + g W_1 + g V_1 \quad (A.1)$$

と書いてみる。こゝで W_1 は対角形で V_1 は非対角形である。すると本文のやり方で $B(g V_1)$ とこれに付随するユニタリ作用素 $U = \exp(B(g V_1))$ が定義できて、正準変換

$$H_1 = U^{-1} H U = H^0 + g W_1 - \frac{1}{2} [B(g V_1), g V_1] + \dots - \frac{1}{11} [B(g V_1), g W_1] + \dots \quad (A.2)$$

が行われる。以下本文にあるような正準変換をくり返すのであるが、これを無限に続行して (3.26) のような級数をつつたとしても、それは、 $g=0$ における特異点のために発散する。しかし g が正で十分小さいとき (A.2) のはじめの2項の和 $H^0 + g W_1$ の固有値は H の固有値に十分良い近似で接近している。とくに H の小さい固有値ほどその近似がよろしい。その証明は省略するが、 H の固有値を WKB 法で求めてみてもしそうなっていることが分かる。

参考文献

- 1) O. Miyatake, J. Inst. Polytech., Osaka City Univ. 3 (1952), 145; L. van Hove, Physica 18 (1952), 145
- 2) K. Friedrichs, Perturbation of Spectra in Hilbert Space, (Am. Math. Soc. Providence, 1965)
- 3) G. Wentzel, Quantum Theory of Fields (Interscience Publishers, INC., New York 1949)
- 4) G. C. Wick, Rev. Mod. Phys. 27 (1955), 339
- 5) S. S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory (Row, Peterson, and Company, Evanston, Illinois 1961) p. 174
- 6) O. Miyatake, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 328
- 7) Y. Kato, Prog. Theor. Phys., 26 (1961), 99; N. Mugibayashi and Y. Kato, Prog. Theor. Phys., 31 (1964), 300
- 8) F. R. Halpern, Journ. Math. Phys., 14 (1973), 219